# Números complejos

Verónica Simoy   María Laura Maestri   Lucas Corrales

**Carrera:** Licenciatura en Tecnología Ambiental
**Asignatura:** Geometría y Álgebra Lineal

**Temas:** *Ecuaciones, Números complejos, Representación geométrica, Fórmula de De Moivre y raíces de números complejos.*

## 1. Ecuaciones

Una ecuación es una igualdad matemática entre dos expresiones algebraicas, denominadas miembros, en las que aparecen valores conocidos o datos, y desconocidos llamados incógnitas, relacionados mediante operaciones matemáticas.

Resolver una ecuación es encontrar su dominio solución, que es el conjunto de valores de las incógnitas para los cuales la igualdad se cumple.(Wikipedia)

### 1.1. Ejercicios

1. Resolver las siguientes ecuaciones:

   *a*) $6\,(x+2) = \sqrt{3}\left(\sqrt{2} - \sqrt{3}x\right) - \sqrt{6}$

   *b*) $(x-2)^2 = \left((x+1)^2 - x^2 - 2x + 1\right)^2$

   *c*) $1 - (\cos\alpha - \sin\alpha)^2 + \cos\alpha = (\cos\alpha - \sin\alpha)(\sin\alpha - \cos\alpha)$

   *d*) $x^3 + 3x^2 + x + 3 = 0$

2. Formalizar las propiedades de las operaciones en $\mathbb{R}$ utilizadas para resolver el inciso anterior (asociativa, conmutativa, etc.).

   **Ejemplo** (Asociativa para la suma)**.**

   $$\forall x, y, z \in \mathbb{R} \quad (x+y) + z = x + (y+z)$$

3. ¿Cuál es el menor conjunto numérico ($\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ o $\mathbb{R}$) en el que tienen solución cada una de las ecuaciones del primer inciso?

## 2. Números complejos

Cuando precisamos resolver la ecuación

$$x^2 + 1 = 0$$

nos encontramos con que no hay solución dentro del conjunto númerico más grande que conocemos hasta ahora, $\mathbb{R}$.

Definimos al elemento $i$ como la solución a dicha ecuación. Naturalmente sabemos que $i \notin \mathbb{R}$ y por definición $i = \sqrt{-1}$.

Por las propiedades que conocemos de $\mathbb{R}$ podemos escribir

$$\sqrt{-25} = \sqrt{(-1)(25)} = \sqrt{-1}\sqrt{25} = i5 = 5i$$

por lo que sería deseable poder multiplicar al elemento $i$ por cualquier número real e incluso sumar números reales multiplicados por $i$.

Naturalmente no tenemos forma de simplificar las expresiónes del tipo $1/4 + 4i$ ya que $1/4 \in \mathbb{R}$ y $4i \notin \mathbb{R}$.

Definimos el conjunto de los números complejos, y lo llamamos $\mathbb{C}$, como

$$\mathbb{C} = \{a + bi : a, b \in \mathbb{R}\}.$$

Podríamos pensar a los elementos de $\mathbb{C}$ como pares ordenados, es decir identificar $a + bi = (a, b)$. Por lo tanto, podemos representar a los números complejos como elementos del plano, es decir como vectores, determinados ya sea por sus coordenadas (a,b) o por su ángulo respecto al eje de las ordenada y conocer también la longitud del vector.

Llamamos forma binómica a la escritura de la forma $z = a+bi$, donde $a$ es la parte real de $z$, $\mathrm{Re}(z)$, y $b$ es la parte imaginaria de $z$, $\mathrm{Im}(z)$

## 2.1. Operaciones con números complejos

La suma, resta y multiplicación de números complejos se realiza siguiendo las operaciones algebraicas habituales para binomios, es decir,

$$(a_1 + b_1 i) \pm (a_2 + b_2 i) = (a_1 + a_2) \pm (b_1 + b_2)i$$
$$(a_1 + b_1 i) \cdot (a_2 + b_2 i) = a_1a_2 + ia_1b_2 + ia_2b_1 + b_1b_2i^2 = (a_1a_2 - b_1b_2) + i(a_1b_2 + a_2b_1)$$

La operación que nos resta definir es la división, para ello necesitamos definir el conjugado de $z$.

Llamamos conjugado de un número $z = a+bi$ y lo denotamos por $\bar{z}$ al complejo que tiene la misma parte real que $z$ y su parte imaginaria es el opuesto de la parte imaginaria de $z$. Es decir,

$$\bar{z} = a - bi.$$

Analizamos juntos que ocurre cuando resolvemos:

1. $z + \bar{z}$
2. $z - \bar{z}$
3. $z\bar{z}$

Ahora estamos en condiciones de realizar divisiones entre números complejos. Para esto será necesario utilizar la igualdad $z\bar{z} = a^2 + b^2$. El cociente entre $a + bi$ y $c + di$ es:

$$\frac{a+bi}{c+di} = \frac{(a+bi)\overline{(c+di)}}{(c+di)\overline{(c+di)}} = \frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)} = \frac{(ac-bd)+i(ad+cb)}{c^2+d^2} = \frac{ac-bd}{c^2+d^2} + i\frac{ad+cb}{c^2+d^2}$$

## 2.2. Ejercicios

1. Realizar las siguientes operaciones:

    *a*) $(3 + i) + i$
    *b*) $(1 + 2i) - (2 - i)$
    *c*) $(3 - 2i) + (1 + 3i)$
    *d*) $(1 + i)\,i$
    *e*) $(1 + i)\,5$
    *f*) $(1 + i)(2 + 3i)$
    *g*) $(-2 + i) : (1 + i)$
    *h*) $(2 + 3i) : i$
    *i*) $(2 + 3i) : 2$

2. Comprobar las propiedades conocidas de la suma y el producto en $\mathbb{R}$ para las nuevas operaciones definidas en $\mathbb{C}$.

3. Resolver las siguientes ecuaciones:

*a*) $x^4 - 1 = 0$ *b*) $(2 + xi)i = (2x - 4i)i$ *c*) $(2 + 3i)\,x = xi + 3$

4. Leer la definición de cuerpo que sigue. ¿Cuáles de los conjuntos numéricos forman un cuerpo?

**Definición.** Decimos que un conjunto $\mathbb{K}$ es un cuerpo (o campo) si podemos definir en él la suma y el producto y se cumplen:

- $\mathbb{K}$ es cerrado para la suma y la multiplicación.
- La multiplicación y la suma son asociativas.
- La multiplicación y la suma son conmutativas.
- Existe un neutro para la suma y un neutro para la multiplicación.
- Existe un inverso para la suma y un inverso para la multiplicación.
- Vale la propiedad distributiva de la multiplicación respecto de la suma.

# 3. Representación geométrica

Como mencionamos previamente, podemos pensar al número complejo $z = a + bi$ como un vector en el plano. Llamaremos al eje de las ordenadas eje real y al de las abscisas eje imaginario.

Un número complejo quedará determinado por su longitud, de ahora en más modulo, y por el ángulo que forma con el eje real, de ahora en más argumento. Escribimos $|z|$ para indicar el módulo de $z$ y $\arg(z)$ para indicar su argumento.

Observemos que tenemos una cantidad infinita de argumentos posibles para un mismo complejo, por lo que consideraremos solamente el argumento principal, es decir el ángulo entre $[0, 2\pi)$.

Por simple trigonométrica podemos probar que si $z = a + bi$ entonces vale:

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$
$$\arg(z) = \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{b}{a}\right)$$
$$a = |z| \cos\alpha$$
$$b = |z| \operatorname{sen}\alpha.$$

De las igualdades anteriores se deduce que podemos escribir

$$z = |z| \left(\cos\alpha + i \operatorname{sen}\alpha\right).$$

formalmente sigue siendo una forma binomial, pero estamos utilizando el módulo y argumento del número complejo para representarlo. Podríamos utilizar una escritura del tipo $(r, \alpha)$ para describir el número complejo, donde $r = |z|$ y $\alpha$ representa el ángulo que forma $z$ con el eje de las ordenadas, representación que se llama forma polar.

Recordando las identidades trigonométricas

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta$$
$$\operatorname{sen}(\alpha + \beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \cos\alpha\operatorname{sen}\beta,$$

podemos interpretar geométricamente el producto de dos números complejos gracias a la fórmula:

$$z.w = |z||w| \left(\cos(\alpha + \beta) + i \operatorname{sen}(\alpha + \beta)\right),$$

que nos dice que al multiplicar dos números complejos, se multiplican los módulos y se suman los argumentos.

## 3.1. Ejercicios

1. Interpretar la suma y el producto de complejos en el plano a partir de los siguientes incisos:

*a*) $(1+i)+i=1+2i$

*b*) $(1+i)-i=1$

*c*) $(1+i)\,i=-1+i$

*d*) $(1+i)\,2i=-2+2i$

2. Interpretar geométricamente el concepto de conjugado de un número.

3. Dado el complejo $z=-2+i$ calcular:

   *a*) $|z|$

   *b*) $\arg(z)$

   *c*) $z\bar{z}$

   *d*) $z-\bar{z}$

   *e*) $z+\bar{z}$

   *f*) $z^3$

4. Graficar los siguientes conjuntos:

   *a*) $\{z\in\mathbb{C}:|z-i|=1\}$

   *b*) $\{z\in\mathbb{C}:\operatorname{Re}(z)<1\}$

   *c*) $\{z\in\mathbb{C}:|z-i|>1,\operatorname{Re}(z)<1\}$

   *d*) $\{z\in\mathbb{C}:3\operatorname{Re}(z)-1=2\operatorname{Im}(z)\}$

   *e*) $\{z\in\mathbb{C}:\operatorname{Re}(z)-2\operatorname{Im}(z)=2,|z|<4\}$

5. Probar que si $z,w\in\mathbb{C}$,
$$z.w=|z||w|\left(\cos(\alpha+\beta)+i\operatorname{sen}(\alpha+\beta)\right)$$

# 4. Fórmula de De Moivre y raíces de números complejos

La fórmula de De Moivre es una importante herramienta para realizar cálculos y operaciones con números complejos.

**Teorema 4.1 (Fórmula de De Moivre).** *Dado un número $z\in\mathbb{C}$ y un número $n\in\mathbb{N}$ vale la siguiente igualdad,*

$$z^n=\left[|z|\left(\cos\alpha+i\sin\alpha\right)\right]^n=|z|^n\left(\cos n\alpha+i\sin n\alpha\right)$$

*Demostración.* La demostración se puede realizar por inducción y la vamos a dejar como tarea. Hay que utilizar las identidades trigonométricas que permiten calcular el seno y el coseno de la suma de dos ángulos. □

Veamos ahora como utilizar la fórmula de De Moivre para calcular raíces de números complejos.

En primer lugar observemos que un número $w$ es raíz n-ésima de $z$ si $w^n=z$. Por ejemplo, como $i^4=1$, $i$ es raíz cuarta de 1.

Escribimos $z=|z|\left(\cos\alpha+i\sin\alpha\right)$ y $w=|w|\left(\cos\beta+i\sin\beta\right)$. Entonces, por la fórmula de De Moivre, tenemos,

$$z=w^n$$
$$|z|\left(\cos\alpha+i\sin\alpha\right)=|w|^n\left(\cos n\beta+i\sin n\beta\right)$$

de donde podemos sacar dos conclusiones:

1. $|w|^n=|z|\implies|w|=\sqrt[n]{|z|}$

2. $n\beta=\alpha+2k\pi\implies\beta=\frac{\alpha+2k\pi}{n}$

Pero... ¿por qué no es $n\beta=\alpha$? Porque $\alpha$ es el argumento principal de $z$, pero tenemos que recordar que tenemos infinitos argumentos para un número complejo ($\arg(z)+2k\pi$, $k=0,1,2,\dots$).

Observemos que la igualdad de los argumentos obtenida nos permite calcular el argumento principal para $n$ raíces distintas de $z$, una para cada valor de $k$ entre 0 y $n-1$.

Por lo tanto tendremos las $n$ raíces de $z$,

$$w_k = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\alpha+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\alpha+2k\pi}{n}\right), \quad k = 0, 1, \ldots, n-1$$

Es importante notar que $\mathbb{C}$ es un cuerpo algebraicamente cerrado, es decir, que todo polinomio en $\mathbb{C}$ tiene al menos una raíz. Esto no ocurre en $\mathbb{R}$, un ejemplo es $x^2+1$ que no tiene ninguna raíz real. Este resultado se conoce como el *Teorema Fundamental del Álgebra* el cual sólo será enunciado.

**Teorema 4.2 (Teorema Fundamental del Álgebra).** *Si $p(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$ es un polinomio con coeficientes complejos (esto es, $a_i \in \mathbb{C} \quad \forall i : 1 \le i \le n$), entonces la ecuación $p(x) = 0$ tiene $n$ raíces contando sus multiplicidades.*

En este curso trabajaremos con polinomios con coeficientes reales, luego podemos asegurar que ellos tendrán $n$ raíces (reales o complejas), y además, si $z$ es una raíz compleja del polinomio,entonces $\bar{z}$ también es raíz (Ejercicio).

## 4.1. Ejercicios

1. Cálcular y gráficar:

   *a)* $x = \sqrt[5]{1}$

   *b)* $x = \sqrt[3]{27}$

2. Llamamos $G_n$ al conjunto de $n$ raíces de la unidad. En el ejercicio $1a$ de la sección 4.1 calculamos $G_5$ y en el ejercicio $3a$ de la sección 2.2 calculamos $G_4$. Calcular $G_2$ y $G_3$. Graficar los conjuntos.

3. Demostrar que si $w \in G_n$ y $z_0$ es raíz de $z$ entonces $wz_0$ es raíz n-ésima de $z$.

4. Utilizar el ejercicio anterior para calcular las raíces cuartas de $z = 1 + i$. Graficar.

# Ejercicios

1. Probar que:

   *a)* $\overline{z+w} = \bar{z} + \bar{w}$

   *b)* $\overline{zw} = \bar{z}\bar{w}$

   *c)* Si $z$ es raíz del polinomio $P(X)$ entonces $\bar{z}$ también es raíz.

2. Si los números $z_1, z_2, \ldots z_5$ son los vértices de un pentágono regular centrado en el origen, probar que

$$z_1 + z_2 + \cdots + z_5 = 0$$

3. Calcular $\operatorname{Re}(z)$, $\operatorname{Im}(z)$, $|z|$ y $\arg(z)$ en los siguientes casos:

   *a)* $z = i^{17} + \frac{1}{2}i\,(a-i)^3$

   *b)* $z = \left(\sqrt{2} + \sqrt{3}i\right)^2 \left(\overline{1-3i}\right)$

   *c)* $z = \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{2}}i\right)^{179}$

   *d)* $z = \left(\frac{-1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{-1}\left[1 + (2-i)^2\right]$

4. Graficar en el plano:

   *a)* $\{z \in \mathbb{C} : 1 \le |z-1+i| \le 3\}$

   *b)* $\{z \in \mathbb{C} : |z-2| = |z-1-i|\}$

   *c)* $\{z \in \mathbb{C} : -1 \le \operatorname{Re}(z) \le 1, |z| < 2\}$

   *d)* $\{z \in \mathbb{C} : z\operatorname{Im}(z)(1-i) = |z|^2\}$

5. Probar que:

*a*) $\bar{\bar{z}} = z$

*b*) $\bar{z} = z \iff z \in \mathbb{R}$

*c*) $\overline{z^{-1}} = \bar{z}^{-1}$

*d*) $z\bar{z} = |z|^2$

*e*) $|\operatorname{Re}(z)| \leq |z|$

*f*) $|\operatorname{Im}(z)| \leq |z|$

6. Encontrar todos los $z \in \mathbb{C}$ que satisfacen:

   *a*) $z \neq 0$ y $z = \bar{z}^{-1}$

   *b*) $\operatorname{Re}(z^2) = 0$

   *c*) $z \neq 0$ y $z + z^{-1} \in \mathbb{R}$

   *d*) $z\bar{z} = |z|^2$

   *e*) $z^2 + |z^2| = i\bar{z}$

   *f*) $z^2 + (1 + 2i)z + 2i = 0$

7. Hallar todas soluciones de las siguientes ecuaciones:

   *a*) $z^3 - z = 0$

   *b*) $(z + 1)^2 = -1$

   *c*) $z + \frac{1}{z} = 1$

   *d*) $z^3 - 3x^2 + x = 3$

   *e*) $z^2 + z + 1 = 0$

   *f*) $z^3 - 3z^2 + 5z = 15$