Inducción

Verónica Simoy vsimoy@gmail.com
María Laura Maestri marialauramaestri@gmail.com
Lucas Corrales corrales.lucas@gmail.com

Carrera: Licenciatura en Tecnología Ambiental
Asignatura: Geometría y Álgebra Lineal

1. Conjuntos numéricos

¿Qué conjuntos de números conocemos?

Los primeros números que conocimos son los naturales, los que usamos para contar. Llamamos $\mathbb{N}$ al conjunto de números naturales.

A los números naturales podemos sumarlos y multiplicarlos entre si sin problemas, siempre vamos a obtener otro número natural, es decir que el conjunto $\mathbb{N}$ es cerrado para la suma y el producto.

¿Qué pasa si tenemos $n > m$ y queremos calcular $m - n$? Por ejemplo, $5 > 2$ y entonces $2 - 5 = ?$.

El resultado de estas operaciones ya no esta restringido a los números naturales y entran en escena los enteros, es decir los números naturales, sus opuestos y el cero. A este conjunto lo denotamos $\mathbb{Z}$.

Ahora $\mathbb{Z}$ resulta cerrado para la suma, la multiplicación y la resta (¡que es lo mismo que sumar el opuesto!).

El problema del conjunto $\mathbb{Z}$ viene cuando queremos hacer divisiones y es donde aparecen los números racionales, es decir los números de la forma n/m con $n, m \in \mathbb{Z}$. A este conjunto lo denotamos $\mathbb{Q}$.

La necesidad de los números reales ($\mathbb{R}$) viene por una limitación que no tiene que ver con una operación básica, ya que $\mathbb{Q}$ es cerrado para la suma, multiplicación, resta y división (¡que es lo mismo que multiplicar el inverso!). Existen números que no pueden escribirse como cociente de 2 enteros, por ejemplo π, los cuales dan origen a los números irracionales. A este conjunto lo denotamos $\mathbb{I}$.

Podemos escribir entonces:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

Una cuestión a resaltar de los números naturales. Podemos definir el conjunto de números naturales como sigue:

$$\mathbb{N} = \{1, 2 = 1 + 1, 3 = 2 + 1, \dots, n = (n - 1) + 1, \dots\}$$

Es decir que podemos construir todos los números naturales a partir del 1, sumando 1 al numero anterior.

2. Operaciones de conjuntos

Un **conjunto** es una colección de elementos que pueden ser números, puntos, polígonos, polinomios, etc. Un conjunto es en sí mismo un elemento, por lo tanto podemos construir conjuntos de conjuntos.

Vamos a repasar las operaciones entre conjuntos a fin de familiazarnos con la escritura/notación matemática.

Por ejemplo:

- $A = \emptyset \qquad A' = \{\emptyset\}$
- $B = \{1, 2, \{2, 3\}, 5, 7\}$
- $C = \{n \in \mathbb{N} : n > 10\}$
- $D = \{1, x, x^2, x^3\}$
- $F = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 2x + 1 = 0\}$
- $\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}\} = \{x \in \mathbb{R} \mid \exists a, b \in \mathbb{Z} : x = \frac{a}{b}\}$

En los conjuntos no hay repetición de elementos y el orden de los mismos no importa, por ejemplo $\{1, 2, 3, 4\}$ y $\{1, 1, 4, 3, 2\}$ son el mismo conjunto.

2.1. Elementos y conjuntos

Veamos cuales son las relaciones básicas que hay entre conjuntos y elementos.

En primer lugar, la relación que puede o no existir entre un elemento y un conjunto es la pertenencia, es decir, un elemento e puede o no *pertenecer* a un conjunto C, en lenguaje matemático esto se escribe:

- $e \in C$, y se lee e *pertenece* a C
- $e \notin A$, y se lee e no *pertenece* a C

En segundo lugar, un conjunto esta determinado por sus elementos, es decir que dos conjuntos que tienen los mismos elementos, son el mismos conjunto. Un poco mas complicado de decir, pero necesario para comprender la escritura matemática es de la siguiente forma: si todos los elementos que pertenecen al conjunto C pertenecen al conjunto B y todos los elementos que pertenecen al conjunto B pertenecen al conjunto C, entonces C y B son el mismo conjunto. Ahora vamos a escribir esto en lenguaje matemático de varias formas equivalentes:

- Si $\forall e \in C, e \in B$ y $\forall e \in C, e \in B \implies B = C$
- Si $\forall e \, (e \in C \implies e \in B$ y $e \in B \implies e \in C) \implies B = C$
- $\forall e \, (e \in C \iff e \in B) \implies C = B$

Por último, puede darse que todos los elementos de un conjunto C pertenezcan a otro conjunto B, pero no suceda lo inverso. En este caso decimos que C es un subconjunto de B y lo escribimos así,

- $\forall e \, (e \in C \implies e \in B) \implies C \subset B$

2.2. Operaciones entre conjuntos

Las operaciones básicas que pueden ser realizadas entre conjuntos son: unión, intersección, complemento. Las primeras dos son binarias, es decir que se aplican a dos conjuntos. La última es uno-aria ya que se aplica a un solo conjunto. El resultado siempre es un conjunto.

Las definiciones de las operaciones son las siguientes:

- $A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$
- $A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$
- $A^c = \{x \mid x \notin A\}$

En en lenguaje matemático, $\vee$ significa *o* y $\wedge$ significa *y*.

2.3. Ejercicios

1. Escribir utilizando lenguaje matemático los siguientes conjuntos:

   a) Números enteros entre -10 y 5.

   b) Números pares

   c) Números irracionales

   d) Números impares

2. Considere los conjuntos dados como ejemplos al principio del capitulo. Calcular:

   a) $A \cap B$

   b) $A \cup D$

   c) $A \cap \mathbb{Q}$

   d) B^c

   e) $A \cap D^c$

3. Dados dos conjuntos es posible definir la operación diferencia como $A \cap D^c$. Escribir la definición en función de los elementos (de la misma forma que las definiciones de las operaciones dadas).

3. Sumatoria y productoria

Esta sección tiene como objetivo introducir dos notaciones muy útiles para simplificar la escritura en lenguaje matemático.

3.1. Sumatoria

La idea de la sumatoria es simplificar la notación de sumas que involucran muchos sumandos, por ejemplo si queremos escribir la suma de los primeros 100 números,

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + \cdots + 99 + 100$$

podemos escribir

$$\sum_{n=1}^{100} n$$

que se lee: la suma de n con n variando desde 1 hasta 100. Veamos algunos ejemplos:

- $\displaystyle\sum_{k=1}^{20}(x-1)^k = (x-1)+(x-1)^2+(x-1)^3+\cdots+(x-1)^{20}$
- $\displaystyle\sum_{k=4}^{10} 1 = 1+1+1+1+1+1+1 = 7$
- $\displaystyle\sum_{k=0}^{5} k^2 = 0^2+1^2+2^2+3^2+4^2+5^2$

3.2. Productoria

La idea de la productoria es análoga a la de sumatoria. Veamos algunos ejemplos:

- $\displaystyle\prod_{k=1}^{7} k = 1\times 2\times 3\times 4\times 5\times 6\times 7 = 7!$
- $\displaystyle\prod_{k=4}^{8} 2^{2k} = 2^8\times 2^{10}\times 2^{12}\times 2^{14}\times 2^{16} = 2^{\sum_{k=4}^{8} 2k}$
- $\displaystyle\prod_{k=0}^{5} k^2 = 0^2\times 1^2\times 2^2\times 3^2\times 4^2\times 5^2 = 0$

3.3. Ejercicios

Escribir utilizando sumatoria o productoria, según corresponda:

1. La suma de los primeros 100 números naturales.
2. La suma de los primeros 25 números pares mayores a 10.
3. El producto de los primeros 100 números impares.
4. El producto de los primeros 100 números impares.

4. Inducción

La idea de la inducción matemática suele ser introducida mediante una analogía. Supongamos que tenemos una fila de fichas de domino paradas.

Si nosotros logramos demostrar que, cualquiera sea la ficha que elijamos, al caer hará caer la ficha siguiente, y además podemos tirar la primer ficha, entonces todas las fichas van a caer.

Otra analogía posible son los relevos en una carrera de postas o el sistema de comunicación Inca a través de los chasquis.

La inducción nos sirve para demostrar que una propiedad es válida para todos los números naturales.

4.1. El método

El método consiste en 2 pasos:

1. Probamos que la propiedad es válida para $k = 1$.
2. Probamos que si la propiedad es válida para un k cualquiera, también es válida para $k + 1$.

Entonces podemos concluir que la propiedad es valida para cualquier n.

Volviendo a la analogía, estamos probando primero que podemos tirar la primer ficha y después que cualquier ficha que caiga va a tirar la siguiente. Por lo tanto concluimos que todas la fichas van a caer.

Veamos el método a través de dos ejemplos.

4.2. Ejercicio

1. Queremos demostrar que vale la siguiente propiedad:

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad 1 + 3 + 5 + \cdots + (2k - 1) = \sum_{i=1}^{k}(2i - 1) = k^2,$$

   es decir, que la suma de los primeros k números impares es igual a k^2.

   a) Probar que $\frac{k(k+1)}{2} = k$ cuando $k = 1$

   b) Completar en los lugares vacíos:

$$\sum_{i=1}^{k+1}(2i - 1) = \sum_{i=1}^{k}(2i - 1) + \underbrace{\qquad\quad}_{1} \underbrace{=}_{\text{H.I.}} \underbrace{\qquad\quad}_{2} + \underbrace{\qquad\quad}_{1} = (k + 1)^2$$

2. Demostrar que:

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad 1 + 2 + 3 + \cdots + k) = \sum_{i=1}^{k} i = \frac{k(k + 1)}{2},$$

   es decir, que la suma de los primeros k números naturales es igual a $\frac{k(k+1)}{2}$.

4.3. Conjuntos inductivos

Decimos que un subconjunto S de $\mathbb{R}$ es inductivo si:

1. $1 \in S$
2. $k \in S \Rightarrow k + 1 \in S$

Si un conjunto S es inductivo entonces necesariamente debe ser $\mathbb{N} \subset S$ ya que la propiedad 1) ($1 \in S$) y la propiedad 2) ($k \in S$ entonces $k + 1 \in S$) implican que $1 + 1 = 2 \in S$ y aplicando nuevamente la propiedad 2) tenemos que $3 \in S$ y así todo natural estará en S.

4.4. Ejercicios

1. Decidir cuales de los siguientes conjuntos son inductivos:

a) $\mathbb{R}$

b) $\mathbb{R}_{<5} = \{x \in \mathbb{R} : x < 5\}$

c) $\emptyset$

d) $Z_{\geq 8} = \{x \in \mathbb{Z} : x \geq 8\}$

2. Probar que si $K \subset \mathbb{N}$ y K es inductivo entonces $K = \mathbb{N}$.

Esta último ejercicio es la justificación de la validez de la inducción. Cuando realizamos una demostración por inducción probamos que el conjunto de números naturales para los cuales una propiedad es valida, es inductivo y por lo tanto la propiedad es válida para todos los números naturales.

Ejercicios

1. Demostrar

   a) $2^n > n, \quad \forall n \in \mathbb{N}$

   b) $(2n)! = 2(n!), \quad \forall n \in \mathbb{N}$

   c) $\left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2 = \sum_{k=1}^{n} k^3, \quad \forall n \in \mathbb{N}$

   d) $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} > \sqrt{n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2$

   e) $n^5 - n$ es divisibile por 9, $\quad \forall n \in \mathbb{N}$

   f) $4^n + 15n - 1$ es divisibile por 5, $\quad \forall n \in \mathbb{N}$

   g) $\frac{n}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n^3}{6} \in \mathbb{N}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2$

   h) $\frac{n}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n^3}{6} \in \mathbb{N}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2$

   i) $n! - (n-1)! = (n-1)^2(n-2)!, \quad \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2$

2. Calcular las siguientes sumatorias y productorias

   a) $\sum_{k=1}^{6} k$

   b) $\sum_{k=1}^{4} 2k^2$

   c) $\sum_{k=1}^{3} k(k+1)$

   d) $\sum_{k=1}^{4} (k + k^2)$

   e) $\prod_{k=1}^{7} 2k$

   f) $\prod_{k=1}^{6} (k+1)$

   g) $\prod_{k=1}^{4} k^2$

   h) $\prod_{k=1}^{3} \left(1 - \frac{1}{(k+1)^2}\right)$

3. Demostrar las siguientes igualdades

   a) $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$

   b) $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

   c) $\sum_{k=1}^{n} k(k+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$

   d) $\sum_{k=1}^{n} kk! = (n+1)! - 1$

e) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}k^2 = \frac{(-1)^{n-1}n(n+1)}{2}$ *g)* $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} 2k = 2^n n!$

f) $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{1}{(k+1)^2}\right) = \frac{n+2}{2n+2}$ *h)* $\displaystyle(1-x)\prod_{k=1}^{n}\left(1+x^{2^{k-1}}\right) = 1-x^{2^n}$

4. 4) Les proponemos una actividad que parece hablar de las limitaciones de la inducción ¿es realmente así o hay algo mal en el razonamiento?

   El problema es el siguiente, demostrar que: todos los caballos son del mismo color.

   Intentaremos probar que todos los caballos son del mismo color probando que en todo conjunto de n caballos todos los caballos son del mismo color. Para esto una buena técnica podría ser la inducción matemática En un conjunto de un solo caballo todos tienen el mismo color.

   Supongamos ahora que en un conjunto de n caballos todos son del mismo color y veamos qué pasa en un conjunto de n+1 caballos. Pongamos los n+1 caballos en una fila, quitemos el primero, como en todos los conjuntos de n caballos, éstos son todos del mismo color resulta que estos últimos n caballos son del mismo color. Ahora, si quitamos el último caballo en vez del primero, también obtenemos un conjunto de n caballos y por ende todos son del mismo color, pero entonces por un lado tenemos que el segundo caballo es del mismo color que el último y, por el otro que el color del primero es igual al del segundo. Pero entonces el primero y el último también son del mismo color y, por lo tanto los n+1 son todos del mismo color.

   Obviamente no todos los caballos del mundo son del mismo color, ¿es cierto que el principio de inducción falla en este caso?