Principios básicos de la combinatoria

Combinatoria

Disciplina que se ocupa de estudiar técnicas de conteo y enumeración de conjuntos, en especial cuando la cantidad de elementos que poseen es muy grande.

Aplicada a la teoría de probabilidades permite en muchos casos determinar la cantidad de elementos de un espacio muestral finito y la cantidad de elementos de algún evento de interés.

Ejemplo 1

En una fábrica de vajillas realizan platos de 3 tamaños distintos y trabajan con 4 colores distintos. Si un determinados día fabricaron 100 platos chicos de color verde, 200 platos medios de color violeta y 300 platos grandes de color azul.

- ¿Cuántos platos fabricaron ese día?
- ¿Cuántos platos distintos se pueden fabricar combinando los tamaños y los colores?

Ejemplo 2

Un curso escolar está formado por 10 niñas y 15 niños.

- ¿Cuántos alumnos son?
- Si el docente quiere seleccionar una pareja para hacer una demostración de tango, ¿cuántas posibilidades tiene?

- **Principio de la adición:**

Si una tarea se puede realizar de dos formas posibles, dando la primera m resultados posibles y la segunda n resultados posibles, entonces la tarea completa puede arrojar m+n resultados.

- **Principio de la multiplicación:**

Si un procedimiento está compuesta de dos etapas y hay n formas de desarrollar la primera etapa y m de desarrollar la segunda, entonces existen nm formas de desarrollar el procedimiento completo.Este principio también se conoce como **principio de selección.**

Ejemplo 3

Para dejar constancia de los empleados que asistieron a una reunión laboral, el gerente de la empresa decide tomar una foto. Considerando que las sillas están alineadas, y que a la reunión asistieron 10 personas:

- a) ¿cuántas fotos distintas se pueden tomar?
- b) ¿Cuántas serían las posibles fotos si en la foto sólo entran 5 sillas (personas)?

Ejemplo 4

a)¿Cuántas palabras distintas pueden formarse con las letras de la palabra ALUMNO?

b)¿ Y si queremos palabras de cuatro letras?,

c) ¿si quiero palabras de 12 letras y se permiten repetirlas?

Ejemplo 5

- ¿Cuántas palabras distintas pueden formarse con las letras de la palabra AULA?
- ¿Y con las de la palabra ASTRONAUTA?

Permutaciones

Sea A un conjunto finito formado por *n* elementos, una permutación de A es una lista ordenada formada por los *n* elementos de A.

Dos permutaciones de A difieren en la colocación de al menos uno de los elementos.

Las permutaciones son formas de distribuir objetos, n objetos se pueden distribuir de

$$P(n)=n!$$

formas distintas.

Variaciones

Sea A un conjunto con *n* elementos y $r \leq n$, llamaremos variación de orden r a toda lista ordenada formada por r elemntos distintos elegidos entre los n elementos de A.

Dos listas son distintas si difieren en algún elemento o en el orden.

El número total de lista es:

$$V(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

Variaciones con repetición

- Si en la definición anterior podemos repetir elementos obtenemos las variaciones con repetición que son:

$$VR(n, r) = n^r$$

Permutaciones con reposición

Sea A un conjunto de n objetos con n_1 de un primer tipo, n_2 de un segundo tipo, …, y n_r de un r-ésimo tipo, donde $n_1 + n_2 + \ldots + n_r = n$, entonces hay

$$PR(n,r) = \frac{n!}{n_1!.n_2!\ldots n_r!}$$

permutaciones de los n objetos dados.

Problema 6:

Si se desea ubicar a 6 personas alrededor de una mesa circular

- ¿Cuántas disposiciones circulares diferentes hay si éstas se consideran iguales cuando una se obtiene de una rotación de otra?

- Rta:

n° de disposiciones circulares= n° de disposiciones lineales/n

Clase II

Olviden el orden…

Problema 1:

- El kiosco de una escuela vende caramelos, alfajores, turrones y chocolates. Si un niño quiere comprar dos golosinas diferentes, ¿Cuántas opciones tiene?
- Y si quisiera comprar tres golosinas diferentes, ¿Cuántas opciones tiene?

Problema 2:

- En una bolsa tenemos 5 bolillas enumeradas del 1 al 5. Sacamos 2 bolitas. ¿Cuántas opciones hay?
- Y si sacamos 3?

Combinaciones

- El número de muestras no ordenadas y sin repetición de tamaño *k* que se extraen de una población de tamaño n es:

$$C(n,k)=\frac{V(n,k)}{P(k)}$$

Se lo expresa como $\binom{n}{k}$ y una forma simple de recordarlo es:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

Problema 3: (Aplicando la def.)

- a) En un examen de historia, un estudiante debe responder 6 preguntas cualesquiera de un cuestionario de 10. ¿De cuántas formas puede seleccionar las 6 preguntas?
- b) Si el estudiante tiene que responder a 3 preguntas de las seis primeras y a 3 de las 4 últimas. ¿De cuántas formas puede seleccionar las 6 preguntas?

A pensar…
Problema 4:

- Si tenemos dos caramelos y 4 chicos. ¿De cuantas maneras podemos elegir 2 chicos para darle un caramelo a cada uno?

- ¿De cuántas maneras se pueden repartir 2 caramelos entre 4 chicos, sin importar cuantos caramelos van para cada uno?

- ¿De cuántas maneras se pueden repartir 10 caramelos entre 4 chicos?

¿En qué difieren los problemas?

Combinaciones con repetición:

- El número de muestras no ordenadas y con repetición de tamaño *k* que se extraen de una población de tamaño n es:

$$\frac{n+k-1!}{k!\,(n-1)!} = \binom{n+k-1}{k}$$

Esto es, C (n+k-1,k).

Problema 5

- En una rotisería tienen 15 tipos de empanadas, si deseo comprar una docena. ¿cuántas opciones tengo?

Problema 6

- ¿De cuántas formas se pueden distribuir siete manzanas y 6 naranjas entre 4 chicos, si cada uo al menos debe tener una manzana?

Combinando variables

- Dado el binomio $(x+y)^3$,

a) ¿cuál es el coeficiente de x^2y?

b) ¿cuál el de xy^2?

c) ¿ y el de x^3 e y^3?

Teorema:

- Si x e y son variables y n es un entero positivo, entonces:

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k \, y^{n-k}$$

Ejemplos:

- El coeficiente de x^5y^2 de $(x+y)^7$ es: $\binom{7}{5} = \binom{7}{2} = 21$

- El coeficiente de x^5y^2 de $(2x-3y)^7$ es: $\binom{7}{5} 2^5(-3)^2$

Algunas propiedades de los números combinatorios

$$\binom{m}{0} = \binom{m}{m} = 1$$

$$\binom{m}{n} = \binom{m}{m-n}$$

$$\binom{m}{n-1} + \binom{m}{n} = \binom{m+1}{n}$$

Triángulo de Tartaglia (primeras filas)

$$\binom{0}{0}$$

$$\binom{1}{0} \quad \binom{1}{1}$$

$$\binom{2}{0} \quad \binom{2}{1} \quad \binom{2}{2}$$

$$\binom{3}{0} \quad \binom{3}{1} \quad \binom{3}{2} \quad \binom{3}{3}$$

$$\binom{4}{0} \quad \binom{4}{1} \quad \binom{4}{2} \quad \binom{4}{3} \quad \binom{4}{4}$$

$$\binom{5}{0} \quad \binom{5}{1} \quad \binom{5}{2} \quad \binom{5}{3} \quad \binom{5}{4} \quad \binom{5}{5}$$

Propiedades

- Todas las filas empiezan y terminan con el 1.
- Todas las filas son simétricas
- Cada número se obtiene sumando los dos que esta situados sobre él.