Práctico de Vectores (cont.) - Espacios vectoriales

Carrera: Licenciatura en Tecnología Ambiental
Asignatura: Geometría y Álgebra Lineal
Docentes: Verónica Simoy - María Laura Maestri - Lucas Corrales

Temas: producto interno, espacios vectoriales, subespacios, independencia lineal.

1. Probar las siguientes propiedades del producto interno en $\mathbb{R}^n$ (donde $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ son vectores y c un escalar):
a) $\mathbf{u} \bullet \mathbf{v} = \mathbf{v} \bullet \mathbf{u}$
b) $\mathbf{u} \bullet (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \bullet \mathbf{v} + \mathbf{u} \bullet \mathbf{w}$
c) $(c\mathbf{u}) \bullet \mathbf{v} = c\,(\mathbf{u} \bullet \mathbf{v})$
d) $\mathbf{u} \bullet \mathbf{u} \geq 0$, con $\mathbf{u} \bullet \mathbf{u} = \mathbf{0} \iff \mathbf{u} = \mathbf{0}$
e) ¿Cómo se obtiene la *norma* de un vector usando producto interno?

2. Probar que $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ son vectores ortogonales sii
$$\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2$$
Interpretar geométricamente el resultado.

3. Sean $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ con $\|\mathbf{x}\| = 3, \|\mathbf{y}\| = 2$ y $\theta = \arccos\left(-\frac{1}{6}\right)$ el ángulo entre ambos. Mostrar que los vectores $\mathbf{x} + \mathbf{2y}$ y $\mathbf{x} - \mathbf{y}$ son ortogonales.

4. ¿Cuáles de los siguientes conjuntos son subespacios? Justificar la respuesta:
a) $\{\mathbf{x}' = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 + x_2 = 1\}$
b) las matrices diagonales de 2x2.
c) $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : \mathbf{x}' = s(2,1,1) + t(1,2,1)\}$
d) $\{\mathbf{x}' \in \mathbb{R}^3 : \mathbf{x} = (3,0,1) + s(2,1,1) + t(1,2,1)\}$

5. Dados $\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_k \in \mathbb{R}^n$, probar que $gen[\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_k]$ es un subespacio de $\mathbb{R}^n$ denominado *el subespacio generado* por $\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_k$. (Si $gen[\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_k] = \mathbb{R}^n$, se dice que $\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_k$ *generan* $\mathbb{R}^n$.)

6. Sea S un subespacio de $\mathbb{R}^n$. Probar que el conjunto $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{x} \bullet \mathbf{y} = \mathbf{0}$ para todo $\mathbf{y} \in S\}$ es un subespacio que se denomina el *complemento ortogonal* de S y se nota $S^\perp$. ¿Cuál es el complemento ortogonal en $\mathbb{R}^3$ del plano yz?

7. Si A es mxn, probar que:
i) $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : A\mathbf{x} = \mathbf{0}\}$ es un subespacio de $\mathbb{R}^n$: se denomina el *núcleo* de A y se nota $N(A)$.
ii) $\{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m : A\mathbf{x} = \mathbf{y}$ para algún $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n\}$ es un subespacio de $\mathbb{R}^m$: se denomina el *subespacio generado por las columnas* de A y se nota $C(A)$.
iii) Completar: interpretando los subespacios anteriores en términos de un sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ donde A es la matriz asociada, $N(A)$ son las soluciones del correspondiente sistema .... , mientras que $C(A)$ son los vectores resultado $\mathbf{b}$ para los que dicho sistema resulta ....

8. Si A es nxn, probar que $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : A\mathbf{x} = 3\mathbf{x}\}$ es un subespacio de $\mathbb{R}^n$. Geométricamente, ¿qué hace A con todos los vectores de este subespacio?

9. Sean $\mathbf{v}_1 = (1,2,3)', \mathbf{v}_2 = (2,4,5)', \mathbf{v}_3 = (2,4,6)' \in \mathbb{R}^3$. ¿Las siguientes afirmaciones son V ó F? Justificá tu respuesta.

a) El conjunto $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ es *linealmente dependiente* (LD).

b) Cada vector $\mathbf{v}_i$ se puede escribir como combinación lineal de los otros dos.

10. Explicar por qué un conjunto de vectores que incluya al vector nulo es necesariamente LD. ¿Cuándo dos vectores no nulos son LD?

11. Decidir si cada conjunto de vectores es LI:

    a) $\{(1,4),(2,9)\} \subseteq \mathbb{R}^2$
    b) $\{(1,4,0),(2,9,0)\} \subseteq \mathbb{R}^3$
    c) $\{(1,4,0),(2,9,0),(3,-2,0)\} \subseteq \mathbb{R}^3$
    d) $\{(1,2,1),(2,4,5),(0,3,1)\} \subseteq \mathbb{R}^3$
    e) $\{(1,0,1),(1,2,4),(2,2,5),(2,2,-1)\} \subseteq \mathbb{R}^3$
    f) $\{(1,0,2,3),(0,1,1,1),(1,1,4,4)\} \subseteq \mathbb{R}^4$

12. Decidir si cada conjunto de vectores es una *base* del espacio indicado. En caso afirmativo, hallar las *coordenadas* de un vector arbitrario $\mathbf{x} = (x_1, ..., x_n)'$ en dicha base:

    a) $\{(1,2,1),(2,4,5),(0,3,1)\} \subseteq \mathbb{R}^3$
    b) $\{(1,0,1),(1,2,4),(2,2,5),(2,2,-1)\} \subseteq \mathbb{R}^3$
    c) $\{(1,0,2,3),(0,1,1,1),(1,1,4,4)\} \subseteq \mathbb{R}^4$

13. Encontrar una base para cada subespacio, y determinar luego su dimensión:

    a) $S = gen[(2,-2,3),(1,4,7),(7,-2,3)] \subseteq \mathbb{R}^3$
    b) $S = \{x \in \mathbb{R}^4 : x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0, x_2 + x_4 = 0\} \subseteq \mathbb{R}^4$
    c) $S = gen[(1,2,3)]^{\perp} \subseteq \mathbb{R}^3$
    d) $S = \{x \in \mathbb{R}^5 : x_1 = x_2, x_3 = x_4\} \subseteq \mathbb{R}^5$

14. En los siguientes casos los vectores $v_1, \ldots, v_n$ y v vienen dados por sus coordenadas en alguna base de V. Comprobar que $v_1, \ldots, v_n$ es una base de V y hallar las coordenadas de v en esta base.

    a) $v_1 = (1,1,1)$; $v_2 = (1,1,2)$; $v_3 = (1,2,3)$; $v = (a,b,c)$
    b) $v_1 = (2,1,-3)$; $v_2 = (3,2,-5)$; $v_3 = (-1,0,-1)$; $v = (a,b,c)$
    c) $v_1 = (1,2,-1,4)$; $v_2 = (2,3,0,5)$; $v_3 = (1,2,1,4)$; $v_4 = (1,-3,7,2)$; $v = (a,b,c,d)$
    d) $v_1 = (2,-3)$; $v_2 = (-6,4)$; $v = (a,b)$

15. El subestacio S está dado por sus generadores. Hallar en cada caso un sistema de ecuacioes que determine S, una base de S y las coordenadas de un vector $v = (v_1, \ldots, v_n)$ de S en la base encontrada:

    a) $S = (1,0,0,-1),(2,1,1,0),(1,1,1,1),(1,2,3,4),(0,1,2,3)$
    b) $S = (1,1,1,1,0),(1,1,-1,-1,-1),(2,2,0,0,1),(1,1,5,5,2),(1,-1,-1,0,0)$
    c) $S = (1,-1,1,0),(1,1,0,1),(2,0,1,1)$
    d) $S = (1,-1,1,-1,1),(1,1,0,0,3),(3,1,1,-1,7),(0,2,-1,1,2)$