2.3. Ejercicios

1. Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones lineales por la Regla de Cramer, caracterizando el conjunto de soluciones:

$$\begin{cases} 2x - y + 3z = 9 \\ 3x - 5y + z = -4 \\ 4x - 7y + z = 5 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x + y + 4z + 8t = -1 \\ x + 3y - 6z + 2t = 3 \\ 3x - 2y + 2z - 2t = 8 \\ 2x - y + 2z = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x - y - 6z + 3t + 1 = 0 \\ 7x - 4y + 2z - 15t + 32 = 0 \\ x - 2y - 4z + 9t - 5 = 0 \\ x - 2y + 2z - 6t + 8 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 6x + 5y - 2z + 4t + 4 = 0 \\ 9x - y + 4z - t - 13 = 0 \\ 3x + 4y + 2z - 2t - 1 = 0 \\ 3x - 9y + 2t - 11 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -x + y + z + t = a \\ x - y + z + t = b \\ x + y - z + t = c \\ x + y + z - t = d \end{cases} \qquad \begin{cases} ax + by + cz + dt = p \\ -bx + ay + dz + ct = q \\ -cx - dy + az + bt = r \\ -dx + cy - bz + at = s \end{cases}$$

2. Transformar en matrices escalón reducidas las siguientes matrices:

$$\begin{bmatrix} 3 & -6 & 2 & -1 \\ -2 & 4 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & 3 \\ 2 & 4 & -3 & 4 \\ 5 & 10 & -8 & 11 \end{bmatrix}$$

3. Resolver las ecuaciones lineales del ejercicio 1, transformando en matrices escalón reducidas la matriz asociada a cada uno de los sistemas.

4. Resolver las ecuaciones lineales de los siguientes sistemas, transformando en

matrices escalón reducidas:

$$\begin{cases} 2x+2y+t+3=0 \\ 2x+3y+z-4t=0 \\ 3x+4y-z+2t=0 \\ x+3y+z-t-2=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x+y+z+t+u=15 \\ x+2y+3z+4t+5u=35 \\ x+3y+6z+10t+15u=70 \\ x+4y+10z+20t+35u=126 \\ x+5y+15z+35t+70u=210 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x+7y+3z+t=5 \\ x+3y+5z-2t=3 \\ x+5y-9z+8t=1 \\ 5x+18y+4z+5t=12 \end{cases} \qquad \begin{cases} x+y+4z+4t+u+9=0 \\ 2x+2y+17z+17t+82u+146=0 \\ 2x+3z-t+4u+10=0 \\ y+4z+12t+27u+26=0 \\ x+2y+2z+10t-37=0 \end{cases}$$

5. Elegir λ de tal modo que cada uno de los siguientes sistemas de ecuaciones tengan solución:

$$\begin{cases} 2x-y+z+t=1 \\ x+2y-z+4\,t=2 \\ x+7y-4z+11t=\lambda \end{cases} \qquad \begin{cases} \lambda\,x+y+z=1 \\ x+\lambda\,y+z=1 \\ x+y+\lambda\,z=1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (1+\lambda)\,x+y+z=1 \\ x+(1+\lambda)\,y+z=1 \\ x+y+(1+\lambda)\ z=1 \end{cases}$$

6. Determinar para que valores de k el siguiente sistema tiene soluciones distintas de la trivial:

$$\begin{cases} x+(k+1)\,y+z=0 \\ x+y+(k+1)\,z=0 \\ (k+1)\,x+y+z=0 \end{cases}$$

En cada caso, estudiar el espacio solución e interpretar geométricamente.

7. Hallar la ecuación de la recta que pasa por los puntos $p = (a, b)$ y $q = (c, d)$, $(p \neq q)$

8. ¿Cuál es la condición necesaria y suficiente para que tres puntos $p = (a, b)$, $q = (c, d)$ y $r = (e, f)$ estén situados en la misma recta?

9. ¿Cuál es la condición necesaria y suficiente para que tres rectas:

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0$$
$$a_2x + b_2y + c_2 = 0$$
$$a_3x + b_3y + c_3 = 0$$

pasen por un punto?

10. Probar que un polimonio de grado n queda completamente determinado por los valores que toma en $n + 1$ valores distintos de la indeterminada. Más precisamente, demostrar que, si $x_0, x_1, \ldots, x_n$ son números arbitrarios distintos entre si e $y_0, y_1, \ldots, y_n$ son números arbitrarios, existe un único polinomio $f(x)$ de grado menor o igual que n, tal que:

$$f(x_i) = y_i \qquad \forall\, i = 0, 1, \ldots, n$$

11. Hallar el polinomio $f(x)$ de grado ≤ 2, tal que:

$$f(1) = -1, \quad f(-1) = 9, \quad f(2) = -3$$

12. Hallar el polinomio $f(x)$ de grado ≤ 3, tal que:

$$f(-1) = 0, \quad f(1) = 4, \quad f(2) = 3, \quad f(3) = 16$$

13. Hallar un polinomio $f(x)$ de grado ≤ 10, tal que:

$$f(i) = i + 1 \qquad \forall\, i = 0, 1, \ldots, 10$$

14. Sean $u, v, w \in K$ distintos dos a dos. Hallar escalares a, b y c en K, tales que:

$$\begin{bmatrix} u^3 & v^3 & w^3 \end{bmatrix} = a\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} u & v & w \end{bmatrix} + c\begin{bmatrix} u^2 & v^2 & w^2 \end{bmatrix}$$

15. Dadas las matrices en $\mathbb{R}^{2\times 2}$:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

mostrar que para cada matriz $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ existen escalares r, s, t y u, únicos, tales que:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} + s\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} + u\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

16. Para cualquier matriz $[\ x \quad y\ ]$ en $\mathbb{R}^{1\times 2}$ ¿existen escalares a, b, c en $\mathbb{R}$, tales que:

$$[\ x \quad y\ ] = a[\ 1 \quad 2\ ] + b[\ 1 \quad 1\ ] + c[\ 2 \quad 1\ ]$$

¿Son a, b, c únicos?

17. Analizar el siguiente sistema para los distintos valores de α:

$$\begin{cases} 2x - \alpha y + z = -2\alpha + 5 \\ x + y - \alpha z = 1 \\ 4x + y - \alpha z = \alpha \end{cases}$$

18. Dada $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida como:

$$f(x, y, z) = (x + y + z,\ x - y + z,\ x + y - z)$$

es f biyectiva? En caso afirmativo calcular f^{-1}.