Álgebra Lineal
Práctico

Rotaciones, reflexiones y proyecciones en 3D, usando ejes y planos coordenados. Matrices asociadas a estas transformaciones utilizando bases ortonormales adecuadas. Relación con los auto-valores reales y sus auto-vectores

1. *a*) Mostrar que en el plano, la proyección sobre un vector $\mathbf{a}$ fijo $proy_{\mathbf{a}}(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{x}\cdot\mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\|^2}\mathbf{a}$ es una transformación lineal. Graficar. Hallar luego su matriz estándar P y verificar que es simétrica e idempotente. ¿Podés explicar geométricamente porque es idempotente? Mostrar que P tiene rango 1. ¿Se generalizan estos resultados a más dimensiones?

   b) Explicar geométricamente por qué una rotación antohoraria de ángulo $\theta \in [0, 2\pi]$ alrededor del origen en el plano es una transformación lineal. Graficando y usando trigonometría, mostrar luego que su matriz estándar es $A = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$. Verificar que A es ortogonal y que el ángulo entre un vector $\mathbf{x}$ y su rotado $A\mathbf{x}$ es efectivamente θ.

2. Usando el ejercicio anterior cuando sea conveniente, dar matrices A de 2x2 tales que para $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ arbitrario:

   a) $A\mathbf{x}$ es el vector obtenido al proyectar $\mathbf{x}$ sobre la recta $x_1 = x_2$.

   b) $A\mathbf{x}$ es el vector obtenido al proyectar $\mathbf{x}$ sobre la recta $2x_1 - x_2 = 0$.

   c) $A\mathbf{x}$ es el vector obtenido al proyectar $\mathbf{x}$ sobre la recta $2x_1 - x_2 = 0$ y luego rotando el resultado un ángulo $\frac{\pi}{2}$ en sentido antihorario.

   d) $A\mathbf{x}$ es el vector obtenido al realizar las operaciones del item anterior, pero en orden inverso.

3. Mostrar matrices A de 3x3 tales que $A\mathbf{x}$ produzca las siguientes transformaciones:

   a) proyección sobre el plano xy

   b) reflexión respecto al plano xy

   c) rotación 90º en el plano xy, dejando fijo el eje z

   d) todas las trasformaciones anteriores, cambiando el plano xy por el plano yz

4. Sea $t : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la transformación lineal que rota todo el plano un ángulo de $\frac{\pi}{2}$ en sentido antihorario alrededor del origen, y sea $s : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la reflexión respecto del plano $x_1 + X_2 = 0$.

   a) Dar $[t]_{\mathcal{C}}$ y $[s]_{\mathcal{C}}$

   b) Dar $[t \circ s]_{\mathcal{C}}$ y $[s \circ t]_{\mathcal{C}}$. Relacionarlo con el primer inciso.

   c) Usar las cuatro matrices anteriores para transformar el vector $x = (3, 1)'$ y verificar gráficamente los resultados.

5. Sea $t : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ una transformación lineal dada por la reflexión respecto del plano $-x + y + z = 0$.

   a) Encontrar una base $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ de $\mathbb{R}^3$ tal que $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$ generen dicho plano y que $\mathbf{v}_3$ sea ortogonal a éste.

   b) Interpretando geométricamente la transformación, hallar la matriz de t en la base $\mathcal{B}$.

6. a) Sea $S = gen\{(1,0,1)', (0,1,1)'\}$ un subespacio de $\mathbb{R}^3$. Sea $t : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la reflexión respecto de S. Hallar la matriz de t en dos bases distintas.

   b) Sea $S \subseteq \mathbb{R}^3$ el plano de ecuación $2x + y = 0$. Hallar la matriz estándar de la reflexión respecto de S. Hallar luego la matriz en una base distinta.

7. Toda rotación en 3D es una transformación lineal $t : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ que puede describirse de modo simple considerando el eje de rotación $E = gen\{\mathbf{w}\}$ (la recta formada por los vectores que quedan fijos) y el plano $E^\perp$ (llamado plano de rotación) que permite determinar el ángulo de rotación θ comparando el ángulo entre $\mathbf{x} \in E^\perp$ y su imagen $t(\mathbf{x}) \in E^\perp$. Si $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ es una base de $\mathbb{R}^3$ donde $\mathbf{v}_1 = \mathbf{w}$ y $\{\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ es una base ortonormal del plano de rotación, hallar $[t]_\mathcal{B}$ y mostrar que es una matriz ortogonal.

8. Mostrar que la transformación lineal $t : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ cuya matriz estándar es:

$$[t]_\mathcal{C} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

   es una rotación. Hallar el eje y el ángulo correspondientes.

9. Completar: la proyección de un vector $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ es el vector $\mathbf{w} \in$...... tal que $\mathbf{v} - \mathbf{w} \perp S$. Así, $\mathbf{v} = \mathbf{w} + (......)$ con $\mathbf{w} \in S$ y $\mathbf{v} - \mathbf{w} \in S^\perp$. Hacer un esquema gráfico de la situación.

10. Aprovechando que S es un hiperplano, determinar la proyección sobre S de los vectores $\mathbf{b}$ hallando primero su proyección sobre $S^\perp$:

    a) $S = \{x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$, $b = (2,1,1)'$.

    b) $S = \{x_1 + x_2 - x_3 = 0\}$, $b = (2,1,1)'$.

11. Dado el subespacio $S = gen\{(1,1,-1)', (-2,1,1)'\}$ de $\mathbb{R}^3$, hallar la matriz P_S de la proyección sobre S.

12. Cada una de las siguientes transformaciones lineales es una rotación, reflexión o proyección. Decidir que es. Si es rotación calcular el angulo. Si es proyección decidir de que dimensión es el espacio sobre el que se esta proyectando.

$$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} & 0 \\ -\sqrt{3} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} C = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

$$D = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} E = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$