Práctico de Diagonalización de TL

Carrera: Licenciatura en Tecnología Ambiental
Asignatura: Geometría y Álgebra Lineal
Docentes: Verónica Simoy - María Laura Maestri - Lucas Corrales

Temas: diagonalización de TL, subespacios propios, autovalores y autovectores.

1. Hallar los autovalores y autovectores de A:

   a) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$ *b)* $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ *c)* $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -3 & 7 \end{pmatrix}$ *d)* $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & -2 \\ 4 & -8 & -2 \end{pmatrix}$

   e) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ *f)* $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ *g)* $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ *h)* $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

   Luego, chequear que la traza $tr(A)$ (suma de los elementos diagonales) y el determinante $det(A)$ son, respectivamente, la suma y el producto de los *autovalores de* A.

2. i) Mostrar que si A es 2x2 entonces $\chi_A(\lambda) = \lambda^2 - tr(A)\lambda + det(A)$.
   ii) Mostrar que si A es 3x3 entonces $\chi_A(\lambda) = \lambda^3 - tr(A)\lambda^2 + (C_{11} + C_{22} + C_{33})\lambda - det(A)$ (donde C_{ii} es el cofactor de a_{ii}).
   iii) Mostrar que $\chi_A(0) = (-1)^n det(A) =$ término independiente de $\chi_A(\lambda)$. Así, A no es inversible cuando su polinomio característico χ_A no tiene término independiente.
   iv) Mostrar que 0 es autovalor A sii A no es inversible (usar el inciso anterior).

3. Si $\mathbf{v}$ es autovector de A con autovalor λ, usar la ecuación $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$ para:
   a) mostrar que λ^n es autovalor de A^n ¿Con qué autovector?
   b) mostrar que $\mathbf{v}$ es autovector de A^{-1} si A es inversible ¿Con qué autovalor?
   c) mostrar que $\mathbf{v}$ es autovector de $A + \alpha I$ (α real arbitrario) con autovalor $\lambda + \alpha$

4. Decidir si cada una de las matrices del ejercicio 1 (se la puede pensar como la matriz asociada a una TL en alguna base) es diagonalizable. En caso afirmativo, hallar al menos 2 diagonalizaciones diferentes para la matriz mostrando las bases.

5. Decidir si las siguientes transformaciones lineales son diagonalizables:

   a) $g(x, y, z) = (x + y, 2x - z)$
   b) $g(x, y, z) = (3x - y + z)$
   c) $g(x, y, z) = (x + y + z, x + y - z)$
   d) $g(x, y, z) = (x - y, y + z, 2x - y - z, -x + y + 2z)$

6. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ hallar autovalores y autovectores de:

   a) A^2 y relacionarlos con los de A.
   b) $A + I$ y relacionarlos con los de A.
   c) A^{-1} y relacionarlos con los de A.

7. Sea A una matriz 2x2 con autovalores enteros tal que $det(A)$=99. Explicar por qué A es diagonalizable.